

Зад. Всички константи в моделите ще бъдат положителни числа, освен ако не бъде посочено изрично, че не са

Модел 1 (биореактор)

$s(t)$ - количество субстрат

s_{in} - количество входящ субстрат

$x(t)$ - концентрация на микроорганизмите

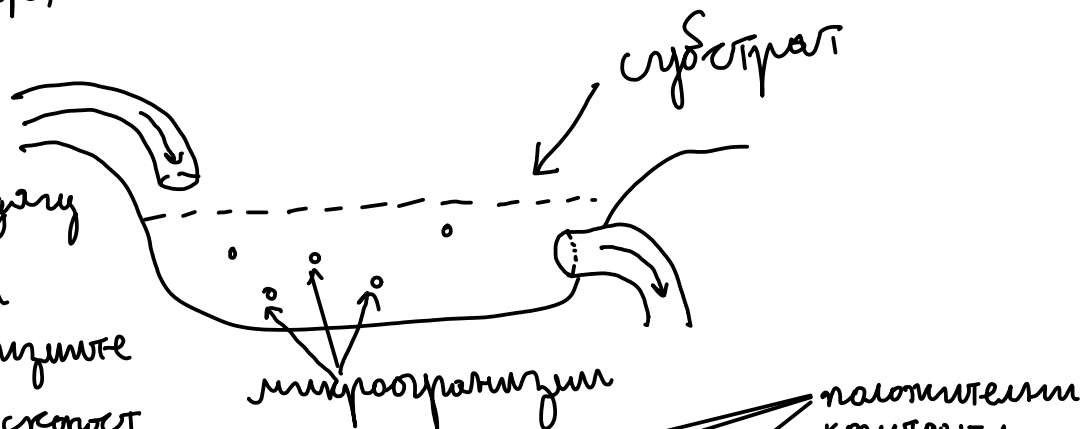
$\mu(s)$ - евалюционна скорост

Q - обем нов субстрат за единица време

V - обем на реактора

$u := \frac{Q}{V}$ - пропорция нов субстрат за ед. време

K - коеф. на хрон. потребност



$$\dot{s}(t) = u(s_{in} - s(t)) - K \mu(s(t)) x(t),$$

$$\dot{x}(t) = x(t)(\mu(s(t)) - d), \quad d \in (0, 1)$$

$$s(0) = s_0 > 0$$

$$x(0) = x_0 > 0$$

"заемване" на организмите по стените

Основни величини в механиката:

- дължина / разстояние (L)
 - време (T)
 - маса (M)
- $\left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} \subset L, T \text{ и } M \text{ ще означ. некакви единици}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} \text{ фиксиранни мерни единици}$

$[u] = \frac{L}{T}$ - с квадратни скобки ще означ. мерната единица за величината u .
 $\uparrow$
 скорост

$[a] = \frac{L}{T^2}$
 $\uparrow$
 ускорение

$$m \cdot a = F$$

$[F] = \frac{M \cdot L}{T^2}$
 $\uparrow$
 сила

$[E] = \frac{M \cdot L^2}{T^2}$
 $\uparrow$
 енергия

Искаме да изразим, че отношението на две величини не зависи от мащаба, т.е. мерната единица.

Ако $f(q_1, \dots, q_n) = 0 \Leftrightarrow f(\lambda_1 q_1, \dots, \lambda_n q_n) = 0$, казваме, че законовт f не зависи от избора на мащаб.

Ако $f(q)$ не зависи от мащаба и q_1 и q_2 са зададени с различни мерни единици, то

$$\frac{f(q_1)}{f(q_2)} = \frac{f(\lambda q_1)}{f(\lambda q_2)} \Leftrightarrow \frac{f(q_1)}{f(\lambda q_1)} = \frac{f(q_2)}{f(\lambda q_2)}$$

$\frac{f(\lambda q)}{f(q)} =: \varphi(\lambda)$ е функция само на λ

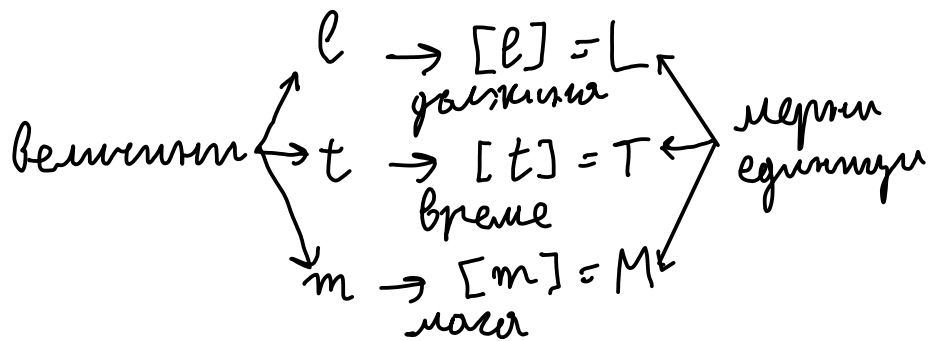
$$\varphi(\lambda\mu) = \frac{f(\lambda\mu q)}{f(q)} = \frac{f(\lambda\mu q)}{f(\mu q)} \cdot \frac{f(\mu q)}{f(q)} = \varphi(\lambda) \cdot \varphi(\mu) \quad (1)$$

$$\varphi(\lambda) = \frac{f(\lambda q)}{f(q)} \Rightarrow \varphi(1) = 1$$

Ще диференцираме (1) по μ

$$\lambda \varphi'(\lambda\mu) = \varphi(\lambda) \cdot \varphi'(\mu)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{\varphi'(1)}{\lambda} \\ \varphi(1) = 1 \end{array} \right. \quad (\text{задача на Коши})$$



$$[P] = \frac{ML^2}{T^2} ; \quad \begin{array}{l} M' = \lambda_m M \\ L' = \lambda_\ell L \\ T' = \lambda_t T \end{array} \Rightarrow P' = \frac{\lambda_m \lambda_\ell^2}{\lambda_t^2} P$$

$P_1, P_2, \dots, P_K$ - величины

$[P_i] = A_i$ - м. единицы

$$[q_j] = A_1^{d_1^j} \dots A_K^{d_K^j}, \quad j = 1, \dots, m$$

$$A'_i = \lambda_i A_i, \quad i = 1, \dots, K$$

$$q'_j = \lambda_1^{d_1^j} \dots \lambda_K^{d_K^j}, \quad j = 1, \dots, m$$

$y = f(q)$ ← величины
 f ← функция
 y ← произведение величин

Нека $\varphi(x) := \frac{f(\lambda q)}{f(q)}$ и $c := \varphi'(1)$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi'(1)}{x} = \frac{c}{x}$$

$$\ln \varphi(x) = \int_1^x \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int_1^x \frac{c}{x} dx = \ln \lambda^c \Rightarrow \varphi(x) = \lambda^c$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$L' := \lambda_\ell L$$

$$T' := \lambda_t T$$

$$[g] = \frac{L}{T^2}$$

$$\lambda_\ell h = \frac{1}{2} \frac{\lambda_\ell}{\lambda_t^2} g \lambda_t^2 t^2 \Leftrightarrow h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$[t] = T$$

$$[h] = L$$

$$\frac{gt^2}{h} - 2 = 0$$

$$\pi := \frac{gt^2}{h}$$

π е безразмерна

Нека $F(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_m) = 0$ е някаква зависимост между величините $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_m$ (независеща от единица), където k е броят величини с независими размерности (т.е. $[q_i] = [p_i]^{a_i} \dots [p_k]^{a_k}$, но между $[p_i]$ и $[p_j]$, $i \neq j$, няма такава зависимост).

Искаме $F(p'_1, \dots, p'_k, q'_1, \dots, q'_m) = 0$

$$F(\lambda_1 p_1, \dots, \lambda_k p_k, \lambda_1^{d_1} \dots \lambda_k^{d_k} q_1, \dots, \lambda_1^{d_1} \dots \lambda_k^{d_k} q_m) = 0$$

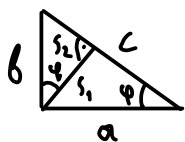
Положим $\lambda_1 := \frac{1}{p_1}, \dots, \lambda_k := \frac{1}{p_k}$

$$F\left(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{\frac{q_1}{p_1^{d_1} \dots p_k^{d_k}}}_{\pi_1}, \dots, \underbrace{\frac{q_m}{p_1^{d_1} \dots p_k^{d_k}}}_{\pi_m}\right) = 0$$

Така съставяме на ф-та F на $k+m$ аргумента функция $f(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$ на m безразмерни аргумента.

Умз. на f се нарича π -теорема.

Упр. 2 (Питагорова теорема)



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Д-во Нека $F(\underbrace{s}_\uparrow, c, \varphi) = 0$ деф. еднозначно тригонометр., т.е. $\left. \begin{matrix} \exists \text{ обр}(\varphi): \\ \varphi(\varphi) = \frac{s}{c^2} \end{matrix} \right\} \pi$

На нея съставяме зависимостта $f(\pi, \varphi) = 0 = F(\frac{s}{c^2}, 1, \varphi)$

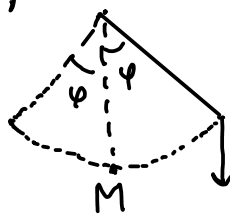
$$s = s_1 + s_2$$

$$c^2 \pi = a^2 \pi + b^2 \pi \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

□

Тр. 3 (идеално математическо махало)

имаме (незвнната) зависимост



$$F(m, l, t, g, \varphi) = 0$$

маса
↑
период
↑
гравитационно ускорение
↑
ъгъл, от който
първоначално
масама е

Периодът не зависи от масата, понеже g не зависи от масата

$\Rightarrow$ можем да махнем масата от уравнението

$F(l, t, g, \varphi) = 0 \Rightarrow f(\tau, \varphi) = 0$, където $\tau = \phi(\varphi) = t \cdot l^\alpha \cdot g^\beta$ е безразмерна величина.

$$[\tau] = t \cdot L^\alpha \cdot \frac{L^\beta}{t^{2\beta}}$$

$$\tau \text{ е безразмерна} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 1 - 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \sim \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{l}{g}} \phi(\varphi) = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\phi(0) + \varphi \phi'(0) + \frac{\varphi^2}{2} \phi''(z) \right), z \in (0, \varphi)$$

$\phi'(0)$ трябва да е 0, понеже периодът не зависи от това дали ъгълът е положителен или отрицателен, а $\varphi \cdot \phi'(0) \stackrel{\text{нужно}}{=} (-\varphi) \phi'(0)$
 $\phi'(0) = 0$

Ако пренебрегнем $\frac{\varphi^2}{2} \phi''(z)$ за малки стойности на φ ,
 получаваме $t = \phi(0) \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$

Тър. 4 (Оценка на енергията на атомна бомба)

$F(t, R, E, \rho) = 0$
 $\nearrow$ време / $\nearrow$ енергия
 $\nearrow$ радиус на взривната волна
 плътност на средата, в която се разпространява шокът

$$\begin{aligned}
 [t] &= T \\
 [R] &= L \\
 [E] &= \frac{M \cdot L^2}{T^2} \\
 [\rho] &= \frac{M}{L^3}
 \end{aligned}$$

$\pi_L = R \cdot t^\alpha \cdot E^\beta \cdot \rho^\gamma$ е константа

$$[\pi_L] = L \cdot T^\alpha \cdot M^\beta \cdot L^{2\beta} \cdot T^{-2\beta} \cdot M^\gamma \cdot L^{-3\gamma} = L^{1+2\beta-3\gamma} \cdot T^{\alpha-2\beta} \cdot M^{\beta+\gamma}$$

$$\left. \begin{aligned}
 1 + 2\beta - 3\gamma &= 0 \\
 \alpha - 2\beta &= 0 \\
 \beta + \gamma &= 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned}
 \alpha &= 2\beta \\
 \gamma &= -\beta
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + 2\beta + 3\beta = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{5}$$

$$\pi_L = R \cdot t^{-\frac{2}{5}} E^{-\frac{1}{5}} \rho^{\frac{1}{5}} = R \sqrt[5]{\frac{\rho}{t^2 E}}$$

$\Rightarrow$ $\exists$ закон $f(\pi)$, таков че $f(\pi) = 0 \Leftrightarrow F(t, R, E, \rho) = 0$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: R = c \sqrt[5]{\frac{t^2 E}{\rho}}$$

Опитно е установено, че $c \approx 1$

$$\Rightarrow E \approx \frac{R^5 \rho}{t^2}$$

22.10.2019

Модел 5 (Закон на Малтус)

$N(t)$ - размер на популация

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt} N(t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lambda N(t) \\ N(0) = N_0 \\ N(t) = e^{\lambda t} N_0 \end{array} \right.$$

$\lambda = \lambda_{\text{раждаемост}} - \mu_{\text{смъртност}}$

Заг. 6

Да се пресметне на базата на исторически данни кога увеликата популация ще достигне 25 M души.

Модел 7 (радиоактивен полуразпад на C^{14})

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt} x(t) = -\lambda x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

5730 години е периода на полуразпад

Заг. 8 $x(t) = 0,8808$ от въглерода е останал през 1988

а) Да се намери t_0 ?

б) За какво време количеството въглерод ще спадне с $\frac{1}{3}$?

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

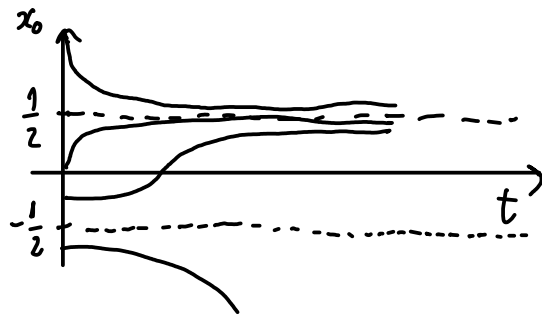
От знака на $f(x(t))$ можем да определим къде $x(t)$ расте, къде намалява и къде има особени точки.

От $\frac{d^2}{dt^2} x(t) = f'(x(t)) f(x(t))$ можем да определим къде $x(t)$ е вдлъбната или изпъкнала.

Тър. 9 $\dot{x}(t) = 1 - 4x^2(t)$

$f(x) = 1 - 4x^2, f'(x) = -8x$

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-
$\ddot{x}(t)$	-	0	+



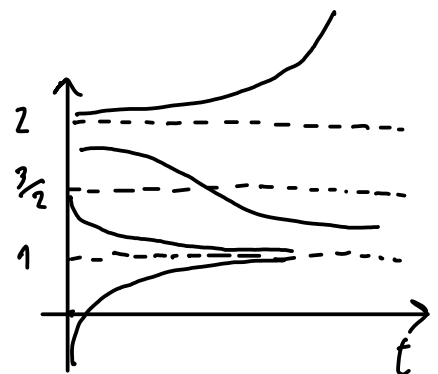
Заг. 10

Да се намери аналитично решение за $x_0 = -\frac{1}{4}$

Тър. 11

$\dot{x}(t) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$
 $x(0) = x_0$

	1	$\frac{3}{2}$	2
f	+	0	-
f'	-	-	0
$\ddot{x}(t)$	-	0	+

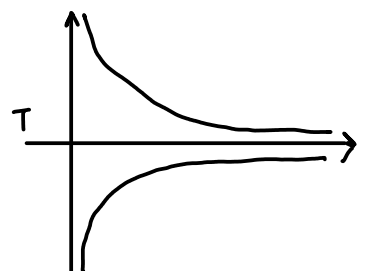


Модел 12

(1) $\dot{\theta}(t) = -\mu(\theta(t) - T)$
 parameter на модела μ $\theta(t)$ температура на тело T темп. на околната среда
 $\theta(t_0) = \theta_0$

$f(x) = -\mu x + \mu T$
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = T$
 $f'(x) = -\mu$

x	T
f	+
f'	-
$\ddot{x}$	0



Ако $T \neq \theta_0$, $\theta(t) \neq T$ в околност $\mathcal{U}$ на t_0

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = -\mu(\theta(t) - T) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \ln(\theta(t) - T) = \frac{\dot{\theta}(t)}{\theta(t) - T} = -\mu \quad \text{за } t \in \mathcal{U}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = e^{-\mu(t-t_0)}(\theta_0 - T) + T \quad (2)$$

Независимо дали $t \in \mathcal{U}$ и $T = \theta_0$, имаме

$$\dot{\theta}(t) = -\mu e^{-\mu(t-t_0)}(\theta_0 - T) - \mu T + \mu T = -\mu(\theta(t) - T),$$

Тоест (2) е общо решение на системата (1).

29.10.2019

Модель 13

$$\begin{cases} m \dot{V}(t) = mg - R(V(t)) \\ R(0) = 0 \\ R'(V) > 0 \end{cases}$$

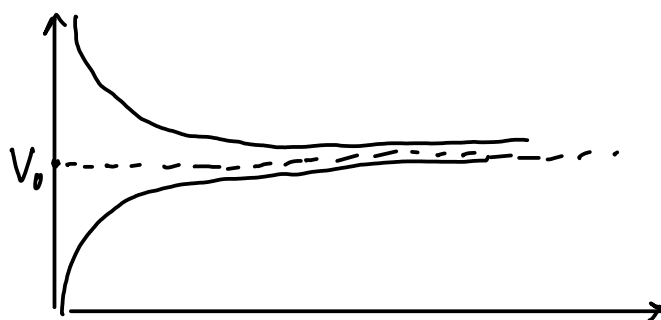
V	V_0		
f	+	0	-
f'	-	-	-
$\ddot{V}$	-	0	+

$$f(V) = g - \frac{R(V)}{m}$$

$$f(V) = 0 \Leftrightarrow R(V) = mg \quad \leftarrow V_0$$

$$f'(V) = -\frac{R'(V)}{m}$$

$$R'(V) > 0 \Rightarrow f'(V) < 0.$$



Заг. 14 (Модель 12)

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = -\mu(\theta(t) - T) \\ \theta(t_0) = \theta_0 \end{cases} \Rightarrow \theta(t) = e^{-\mu(t-t_0)}(\theta_0 - T) + T$$

$$T = 20; \theta_0 = 90; \theta(16) = 70; \theta(16,25) = 50$$

Да е известно t_0

Решение

$$\frac{\theta(t_1) - T}{\theta(t_2) - T} = e^{-\mu(t_1 - t_2)}$$

$$-\mu(t_1 - t_2) = \ln \frac{\theta(t_1) - T}{\theta(t_2) - T} = \ln[\theta(t_1) - T] - \ln[\theta(t_2) - T]$$

$$\mu = -\frac{\ln[\theta(t_1) - T] - \ln[\theta(t_2) - T]}{t_1 - t_2} \approx 2,04$$

$$\theta(t_1) = e^{-\mu(t_1 - t_0)}(\theta_0 - T) + T$$

$$\Rightarrow -\mu(t_1 - t_0) = \ln[\theta(t_1) - T] - \ln[\theta_0 - T]$$

$$\Rightarrow t_0 = t_1 + \frac{\ln[\theta(t_1) - T] - \ln[\theta_0 - T]}{\mu} \approx 15,84$$

Модель 15 (Самков генотип) $\mu > 0$

дискретно время

$$A_{t+\Delta t} = A_t (1 + \mu)$$

$$A_{t+\Delta t} - A_t = A_t \mu$$

$$A_k = A_0 (1 + \mu)^k$$

непрерывного время

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dA(t)}{dt} = -\mu A(t) \\ A(0) = A_0 \end{array} \right.$$

$$A(t) = A_0 e^{-\mu t}$$

Тб. 16

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Тогава $x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_{\sigma}^t a(s) ds} b(\sigma) d\sigma$

Д-во

$$\frac{d}{dt}[x(t)] - a(t)x(t) = b(t) \quad \Big| \cdot e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} x(t) \right] = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} b(t) \quad \Big| \int_{t_0}^t$$

$$e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\sigma} a(s) ds} b(\sigma) d\sigma \quad \Big| \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_{\sigma}^t a(s) ds} b(\sigma) d\sigma$$

Зада. Разн. системи

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t)) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

За перемената ни имаме $x(t) = y(t - t_0)$

Модел 17 (Епидемиологичен)

$x(t)$ - концентрация на здравите

$y(t)$ - концентрация на болните

← коэффициент на пропорциональности

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -d x(t) y(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

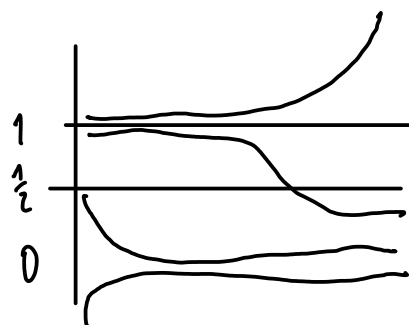
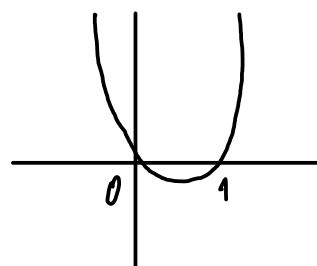
Трето разг. разглежда случай $y(t) = 1 - x(t)$,

$$\dot{x}(t) = -d x(t)(1 - x(t))$$

$$f(x) = -d x(1 - x) = d(x^2 - x)$$

$$f'(x) = d(2x - 1)$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f	+ 0 - - - 0 +		
f'	- - - 0 + + +		
$\ddot{x}$	- 0 + 0 - 0 +		



Сега нека $y(t)$ е решение на системата

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -\mu y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = e^{-\mu t} \cdot y_0$$

$$\dot{x}(t) = -d x(t) y(t) = -d y_0 e^{-\mu t} x(t)$$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-d y_0 \int_0^t e^{-\mu s} ds} = x_0 \cdot e^{\frac{-d y_0}{-\mu} (e^{-\mu t} - 1)} = x_0 \cdot e^{\frac{d y_0}{\mu} (e^{-\mu t} - 1)}$$

$$x(t) \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} x_0 \cdot e^{-\frac{d y_0}{\mu}}$$

Модел 18 (Едра шарка, Бернцун, 1760г.)

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t) - \mu x(t) \quad \text{коэф. на заболяемост при шарка}$$

$$\dot{N}(t) = -\nu \beta x(t) - \mu N(t) \quad \text{коэффициент на заразяване}$$

$$\dot{x}(t) = -\nu \beta x(t) - \mu x(t) \quad \text{коэф. на смъртност по ест. причини}$$

$$x(0) = N(0) = 1 \quad \text{коэф. на смъртност от шарка}$$

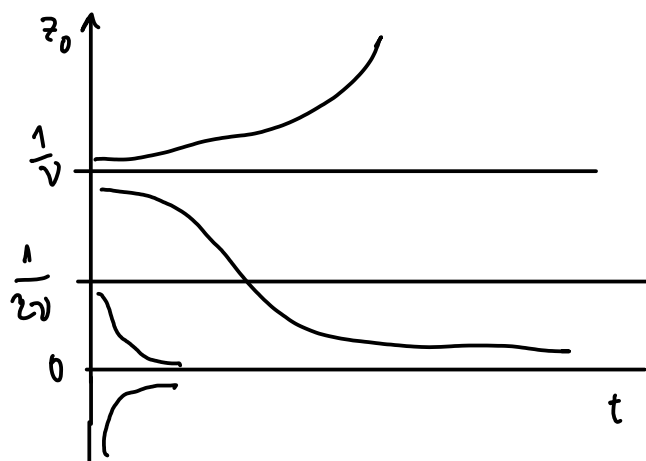
Половаме $z(t) := \frac{x(t)}{N(t)}$

Товава $\dot{z}(t) = \frac{\dot{x}(t)}{N(t)} - \frac{x(t) \dot{N}(t)}{N^2(t)} = \frac{1}{N(t)} \left(-\beta x(t) - \mu x(t) - z(t) [-\nu \beta x(t) - \mu N(t)] \right) =$

$= z(t) [-\beta - \mu + \nu \beta z(t) + \mu] = \beta z(t) (\nu z(t) - 1)$

Системата се свива до

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \beta z(t) (\nu z(t) - 1) \\ z(0) = 1 \end{cases}$$



Половаме $y(t) := \frac{1}{z(t)}$

$\dot{y}(t) = -\frac{\dot{z}(t)}{z^2(t)} = -\beta \left(\nu - \frac{1}{z(t)} \right) = \beta (y(t) - \nu)$

$\Rightarrow y(t) = e^{\beta t} + \int_0^t e^{\beta(t-s)} (-\beta \nu) ds = e^{\beta t} \left[1 + \nu (e^{-\beta t} - 1) \right] = (1 - \nu) e^{\beta t} + \nu$

$\Rightarrow z(t) = \frac{1}{(1 - \nu) e^{\beta t} + \nu}$

Бернши експериментално намира $\beta = \nu = \frac{1}{8}$

Модел 19 (химични реакции)

A, B - вещества с конц. p и q, $0 < p < q$

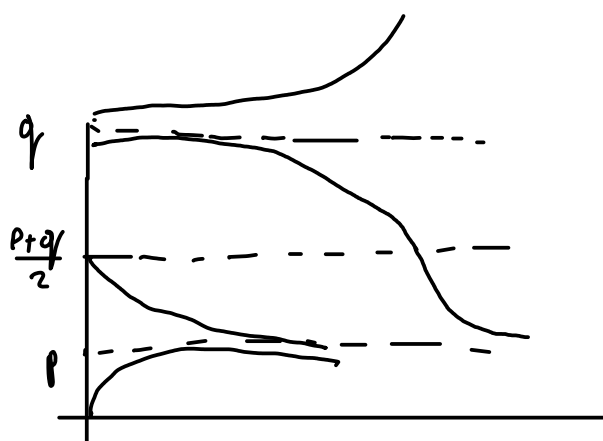
$A + B \rightarrow AB$ - продукт

концентрация на AB
 $\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha (p - x(t))(q - x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$

$f(x) = (p - x)(q - x)$

$f'(x) = 2x - (p + q)$

x	p		$\frac{p+q}{2}$		q	
f	+	0	-	-	-	0 +
f'	-	-	-	0	+	+
''	-	0	+	0	-	0 +



12.11.2019

Заг. 20 (27 от модел 19)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha(p - x(t))(q - x(t)), & 0 < p < q \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

За t в окрестност на 0 имаме $\dot{x}(t) \neq 0$ и можем да запишем уравнението като

$$\frac{\dot{x}(t)}{(p - x(t))(q - x(t))} = \alpha \quad \Bigg| \int_0^t$$

$$\int_0^t \frac{1}{(p - x(\tau))(q - x(\tau))} \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau = \alpha \int_0^t d\tau$$

$$\int_0^{x(t)} \frac{1}{(p - x)(q - x)} dx = \alpha t$$

Гореем A и B , за които

$$\frac{1}{(p - x)(q - x)} = \frac{A}{p - x} + \frac{B}{q - x} = \frac{Aq + Bp - x(A + B)}{(p - x)(q - x)}$$

$$0 \cdot x = (A + B) \cdot x \Rightarrow B = -A$$

$$Aq + Bp = A(q - p) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{q - p} \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{p - q}$$

Тогава

$$\int_0^{x(t)} \frac{1}{(p - x)(q - x)} dx = \frac{1}{q - p} \int_0^{x(t)} \frac{1}{p - x} dx + \frac{1}{p - q} \int_0^{x(t)} \frac{1}{q - x} dx$$

$$= - \frac{\ln|x - p|}{q - p} \Bigg|_{x=0}^{x(t)} - \frac{\ln|x - q|}{p - q} \Bigg|_{x=0}^{x(t)} =$$

$$= -\frac{\ln|x(t)-p|}{q-p} + \frac{\ln p}{q-p} - \frac{\ln|x(t)-q|}{p-q} + \frac{\ln q}{p-q} = \alpha t$$

$$\ln \left| \frac{x(t)-p}{x(t)-q} \cdot \frac{q}{p} \right| = \alpha(p-q)t$$

$$\left| \frac{x(t)-p}{x(t)-q} \cdot \frac{q}{p} \right| = e^{\alpha(p-q)t}$$

За $x(t) \notin [p, q]$, наймалкото в горната част на скалата на 0,

$$\frac{x(t)-p}{x(t)-q} > 0 \quad \text{и} \quad x(t)-p = (x(t)-q) \cdot \frac{p}{q} e^{\alpha(p-q)t}$$

$$x(t) \left(1 - \frac{p}{q} e^{\alpha(p-q)t} \right) = p \left(1 - e^{\alpha(p-q)t} \right)$$

$$x(t) = p \frac{1 - e^{\alpha(p-q)t}}{1 - \frac{p}{q} e^{\alpha(p-q)t}}$$

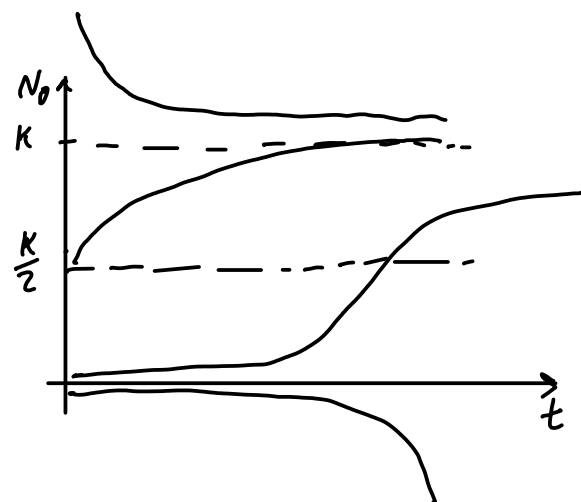
Модел 2.1 (Томпкинсън, Ферхуелт, 1838)

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = \alpha \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t), \quad \alpha, K > 0 \\ N(0) = N_0 > 0 \end{cases}$$

$$f(N) = \alpha \left(1 - \frac{N}{K} \right) N = 0 \Leftrightarrow N=0 \quad \text{или} \quad N=K$$

$$f'(N) = \alpha \left(1 - \frac{2N}{K} \right) = 0 \Leftrightarrow N = \frac{K}{2}$$

t	0	$\frac{K}{2}$	K
f	-	+	0
f'	+	0	-
f''	-	+	0



$$\dot{N}(t) = \lambda \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t)$$

$$\dot{N}(0) = \lambda \left(1 - \frac{N_0}{K} \right) N_0 \Rightarrow \text{Τύπη } N_0 \neq K \quad \& \quad \text{οκολομώτ με } 0 \quad \dot{N}(t) \neq 0$$

$$\frac{K \dot{N}(t)}{(K - N(t)) N(t)} = \lambda \quad \bigg| \int_0^t$$

$$K \int_{N_0}^{N(t)} \frac{1}{(K - N) N} dN = \lambda t$$

$$\text{Τύπη } A, B : \frac{1}{(K - N) N} = \frac{A}{K - N} + \frac{B}{N} = \frac{N[A - B] + KB}{(K - N) N}$$

$$N(A - B) = 0 \Rightarrow A = B \quad \text{u} \quad KB = 1 \Rightarrow A = B = \frac{1}{K}$$

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{1}{K - N} dN + \int_{N_0}^{N(t)} \frac{1}{N} dN = \lambda t$$

$$-\ln |K - N| \bigg|_{N=N_0}^{N(t)} + \ln |N| \bigg|_{N=N_0}^{N(t)} = \lambda t$$

$$\ln \left| \frac{K - N_0}{K - N(t)} \cdot \frac{N(t)}{N_0} \right| = \lambda t$$

$$\exists \alpha \quad N(t) < K \quad \text{u} \quad N_0 < K$$

$$\frac{K - N_0}{K - N(t)} \cdot \frac{N(t)}{N_0} = e^{\lambda t}$$

$$\dot{N}(t) = \frac{N_0 (K - N(t))}{K - N_0} e^{\alpha t}$$

$$N(t) \left(1 + \frac{N_0 e^{\alpha t}}{K - N_0} \right) = \frac{N_0 K}{K - N_0} e^{\alpha t}$$

$$N(t) = \frac{K - N_0}{K - N_0 + N_0 e^{\alpha t}} \cdot \frac{N_0 K}{K - N_0} e^{\alpha t}$$

$$N(t) = \frac{N_0 K}{K - N_0 + N_0 e^{\alpha t}} e^{\alpha t} = \frac{N_0 K e^{\alpha t}}{[(K - N_0) e^{-\alpha t} + N_0] e^{\alpha t}} = \frac{N_0 K}{(K - N_0) e^{-\alpha t} + N_0}$$

2-ym namur:

3a $N_0 \neq 0$ namur $z(t) = \frac{1}{N(t)}$ u $z_0 = \frac{1}{N_0}$. $\dot{z}(t) = -\frac{1}{N^2(t)}$

Tarab

$$\dot{N}(t) = \alpha \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t) \quad \Bigg| \quad \frac{1}{N(t)^2}$$

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)^2} = \alpha \left(\frac{1}{N(t)} - \frac{1}{K} \right)$$

$$\dot{z}(t) = -\alpha \left(z(t) - \frac{1}{K} \right)$$

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{e^{-\int_0^t \alpha ds}}{N_0} + \int_0^t e^{-\int_0^s \alpha ds} \frac{\alpha}{K} ds = \frac{e^{-\alpha t}}{N_0} + \frac{\alpha}{K} \underbrace{\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds}_{e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} ds} = \\ &= \frac{e^{-\alpha t}}{N_0} + \frac{1}{K} e^{-\alpha t} (e^{\alpha t} - 1) = \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}}{N_0} + \frac{1}{K} (1 - e^{-\lambda t}) = \frac{(K - N_0) e^{-\lambda t} + N_0}{K N_0}$$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{K N_0}{(K - N_0) e^{-\lambda t} + N_0}$$

Model 22 (nonlinear)

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = -\lambda \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) N(t), & 0 < K < L \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

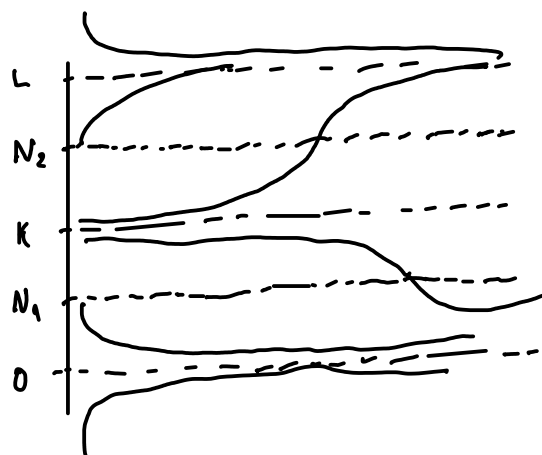
$$f(N) = -(L - N)(K - N)N = -(L - N)(KN - N^2) = -LKN + LN^2 + KN^2 - N^3$$

$$\begin{aligned} \dot{f}(N) = -3N^2 + 2(K+L)N - LK = 0 & \Leftrightarrow N = \frac{-2(K+L) \pm \sqrt{4(K+L)^2 - 12LK}}{-6} = \frac{(K+L) \mp \sqrt{(K+L)^2 - 3LK}}{3} \\ & = \frac{K+L \mp \sqrt{K^2 - LK + L^2}}{3} \end{aligned}$$

Точките корени имат сложен вид, но от т-матрицата на Рун

$\Rightarrow$ корените N_1 и N_2 на $f'(N)$ са $0 < N_1 < K < N_2 < L$

N	0	N_1	K	N_2	L
f	+	0	-	-	0
$\dot{f}$	+	0	-	-	0
f	-	-	0	+	+
$\dot{f}$	-	-	0	+	+
$\ddot{f}$	-	0	+	0	-
$\ddot{N}$	-	0	+	0	-



19.11.2019

Model 23 (Закон на Мавре с ограничење)

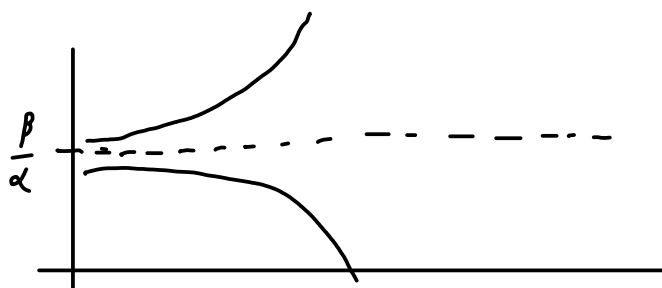
$$\begin{cases} \dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta = \alpha \left(N(t) - \frac{\beta}{\alpha} \right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow N(t) &= N_0 e^{\alpha t} + \int_0^t e^{\alpha(t-\sigma)} (-\beta) d\sigma = N_0 e^{\alpha t} - \beta e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha\sigma} d\sigma = \\ &= N_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha t} (e^{-\alpha t} - 1) = e^{\alpha t} \left(N_0 - 1 \right) + \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

$$f(N) = N - \frac{\beta}{\alpha}$$

$$f'(N) = 1$$

N	$\frac{\beta}{\alpha}$		
f	-	0	+
f	+	+	+
$\dot{N}$	-	0	+



Model 24

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = \alpha \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t) - \beta \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

$$f(N) = \left(1 - \frac{N}{K} \right) N - \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{K} N^2 + N - \frac{\beta}{\alpha}$$

$$f'(N) = -\frac{2}{K} N + 1$$

$$f'(N) = 0 \Leftrightarrow N = \frac{K}{2}$$

Ако $\beta \leq \frac{\alpha K^2}{4}$, f се асимптотично приближува до $N = N_{1,2} = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4\beta/\alpha}}{2}$

Ако $\beta > \frac{\alpha K^2}{4}$, f не се асимптотично приближува до некое N

$$\beta < \frac{\alpha K^2}{4}$$

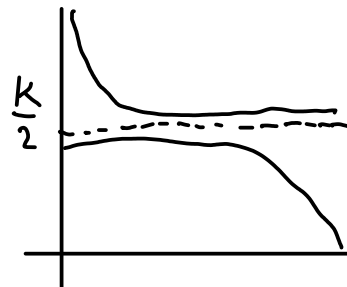
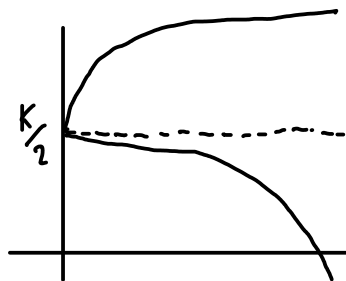
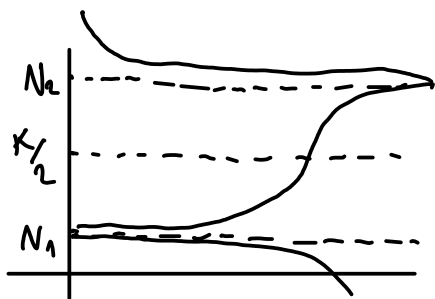
$$\beta = \frac{\alpha K^2}{4}$$

$$\beta > \frac{\alpha K^2}{4}$$

N	$N_1 \quad \frac{K}{2} \quad N_2$						
f	-	0	+	+	+	0	-
f	+	+	+	0	-	-	-
N	-	0	+	0	-	0	+

N	$\frac{K}{2}$		
f	-	0	+
f	+	0	-
$\dot{N}$	-	0	-

N	$\frac{K}{2}$		
f	-	-	-
f	+	0	-
$\dot{N}$	-	0	+



Model 25

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = \alpha \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t) - \beta N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{N}(t) &= (\alpha - \beta) N(t) - \frac{\alpha N^2(t)}{K} = \underbrace{(\alpha - \beta)}_{\alpha'} N(t) \left[1 - \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{N(t)}{K}}_{K'} \right] = \\ &= \alpha' N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K'} \right) \end{aligned}$$

Можно и считать, что член $\beta = 0$ (model 21)

Заг. 26

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

$$N_0 = 200\,000$$

$$\beta = 20\,000$$

$$N(t+\delta) = \gamma N(t)$$

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= 1 \text{ annum} \\ t_1 &= 1 \text{ century} \end{aligned} \right\} 153 \text{ years}$$

$$\begin{aligned} \delta &= 7 \text{ years} \\ \gamma &= 2 \end{aligned}$$

Да се намери $N(t_1)$

Опр. (Устойчивост) Нека $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ е ок. на 0, а функцията $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ е липшицова. Разм.

$$(1) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \leftarrow \text{автономна система}$$

($\varphi(t, x_0)$ означаваме решението на системата с начално условие x_0 в момента t (такова съществува и е единствено).

Функцията $\varphi(t, x_0)$ е непр. диференцируема по t и, от т-мата за непр. зависимост от началните условия, непр. по x_0 .

Точката $\bar{x}$ се нарича стационарна, ако $f(\bar{x}) = 0$

Стационарната точка $\bar{x}$ се нарича устойлива по Лапунов, ако

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: ако $x_0 \in B(\bar{x}, \delta)$, то $\forall t \geq 0, \varphi(t, x_0) \in B(\bar{x}, \varepsilon)$.

Точката $\bar{x}$ е асимптотично устойчива, ако е устойчива по Лапунов и $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$ за $x_0 \in B(\bar{x}, \delta)$.

За простота ще считаме, че $t_0 = 0$ и че $\bar{0}$ е равновесна точка.

Опр. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

f се нарича положително дефинитна, ако $f(0) = 0$ и $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

—||— положително полуdefinitna, ако $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$

—||— отрицателно дефинитна, ако $f(0) = 0$ и $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

—||— отрицателно полуdefinitna, ако $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$

Опр. Функцията $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ се нарича функция на Лапунов за системата (1) в равн. т. $\bar{0} \in D$, ако

1) V е непрекъснато диференцируема

2) V е положително дефинитна

3) функцията $\dot{V}_f(x) := V'(x)f(x)$, където $\dot{V}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ и

$f(x) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, е ограничено дефинирана

Имаме $\frac{dV(x(t))}{dt} = V'(x(t)) x'(t) = V'(x(t)) f(x(t)) = \dot{V}_f(x(t))$

$\dot{V}_f(x)$ показва как се изменя V по траекториите

Заб. Ляпунов ще искаме $\dot{V}_f$ да бъде само полуdefinitна

Опр. Равн. системата (1)

Множеството $S \subseteq \mathbb{R}^n$ е нарича положително инвариантно относно φ , ако $x_0 \in S \Rightarrow \forall t > 0, \varphi(t, x_0) \in S$.

Заб.

За системата (1) разглеждаме

$$x(t) = x_0 + \eta(t)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x_0 + \eta(t)) = \overset{0}{f(x_0)} + \underbrace{\overset{A}{f'(x_0)}}_{\text{не зависи от } t} \cdot \eta(t) + o(\|\eta(t)\|)$$

Това ни дава мотивация да използваме приближението $\dot{y}(t) = Ay + 1$

В експоненциален случай, $\dot{x}(t) = \lambda x(t)$ и $x(t) = e^{\lambda t} x_0$.

при $\lambda > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$

при $\lambda < 0, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Модел 27 Имаме две популации от тревопасни животни

$$\dot{N}_1(t) = f_1(N_1(t), N_2(t)) N_1(t)$$

$$\dot{N}_2(t) = f_2(N_1(t), N_2(t)) N_2(t)$$

$$f_i(0, 0) = \lambda_i > 0, i=1, 2$$

$$\lim_{\|(N_1, N_2)\| \rightarrow \infty} f_i(N_1, N_2) = -\infty, i=1, 2$$

В обичайния случай не можем да кажем много за динамиката

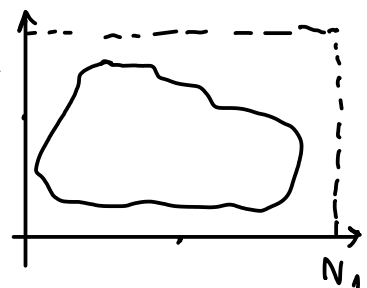
Модер 28

$$\dot{N}_1(t) = (\alpha_1 + \beta_1 F(N_1(t), N_2(t))) N_1(t), \quad N_1(t) \geq 0, N_1(0) = N_1^0$$

$$\dot{N}_2(t) = (\alpha_2 + \beta_2 F(N_1(t), N_2(t))) N_2(t), \quad N_2(t) \geq 0, N_2(0) = N_2^0$$

$$F(0,0) = 0$$

$$\lim_{\| (N_1, N_2) \| \rightarrow \infty} F(N_1, N_2) = -\infty$$



Решения са инвариантни по осите:

$N_i^0 = 0$, то $N_i(t) \equiv 0$, $i=1,2$, и, от тук за едностраност, ако $N_1^0 > 0$ и $N_2^0 > 0$, то $N_1(t) > 0$ и $N_2(t) > 0$.

Паробесни точки:

$$\begin{array}{|l} N_1 = 0 \\ N_2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} F(N_1, N_2) = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \\ N_2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} F(N_1, N_2) = -\frac{\alpha_2}{\beta_2} \\ N_1 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} F(N_1, N_2) = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \\ \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \end{array}$$

Нека $N_1 > 0$ и $N_2 > 0$. За малки t имаме

$$\begin{array}{|l} \frac{d}{dt} \ln N_1(t) = \alpha_1 + \beta_1 F(N_1(t), N_2(t)) \\ \frac{d}{dt} \ln N_2(t) = \alpha_2 + \beta_2 F(N_1(t), N_2(t)) \end{array}$$

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{N_1(t)^{\beta_2}}{N_2(t)^{\beta_1}} = \beta_2 (\alpha_1 + \beta_1 F(N_1(t), N_2(t))) - \beta_1 (\alpha_2 + \beta_2 F(N_1(t), N_2(t))) =$$

$$= \underbrace{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2}_{\gamma}$$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} \ln \frac{N_1(\tau)^{\beta_2}}{N_2(\tau)^{\beta_1}} d\tau = \int_0^t \gamma d\tau$$

$$\ln \frac{N_1(t)^{\beta_2}}{N_2(t)^{\beta_1}} - \ln \frac{(N_1^0)^{\beta_2}}{(N_2^0)^{\beta_1}} = \gamma t$$

$$\frac{N_1(t)^{\beta_2}}{N_2(t)^{\beta_1}} = \frac{(N_1^0)^{\beta_2}}{(N_2^0)^{\beta_1}} e^{\gamma t} \Rightarrow N_1 \text{ забравява брѝно от } N_2$$

1. Нека $\gamma > 0$

$$N_2(t)^{p_1} = \overbrace{N_1(t)^{p_2}}^{\text{опараметро}} \cdot \frac{(N_2^0)^{p_1}}{(N_1^0)^{p_2}} e^{-\gamma t} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} 0$$

$$N_1(t)^{\beta_1} = \underbrace{N_2(t)^{\beta_1}}_{\text{ограничено}} \cdot \frac{(N_1^0)^{\beta_2}}{(N_2^0)^{\beta_1}} e^{\delta t} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} 0$$
$$\frac{N_1(t)^{\beta_2}}{N_2(t)^{\beta_1}} = \frac{(N_1^0)^{\beta_2}}{(N_2^0)^{\beta_1}} \Rightarrow N_1(t)^{\beta_2} = \frac{(N_1^0)^{\beta_2}}{(N_2^0)^{\beta_1}} N_2(t)^{\beta_1}$$
$$\begin{aligned} \dot{N}_1(t) &= (\alpha_1 - \beta_1 N_2(t)) N_1(t) - \text{первый} \\ \dot{N}_2(t) &= -(\alpha_2 - \beta_2 N_1(t)) N_2(t) - \text{второй} \end{aligned}$$

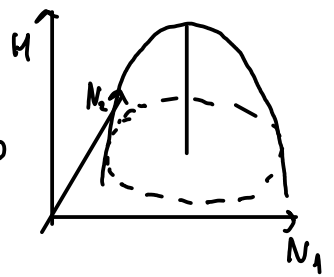
Probewerte form α $(0,0)$ u $(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$

$$\Rightarrow (\lambda_2 - \beta_2 N_1(t)) \frac{d}{dt} \ln N_1(t) + (\lambda_1 - \beta_1 N_2(t)) \frac{d}{dt} \ln N_2(t) = 0$$

Thiaramine $\mu(N_1, N_2) = \alpha_1 \ln N_2 + \alpha_2 \ln N_1 - \beta_1 N_2 - \beta_2 N_1$

$$\frac{d}{dt} H(N_1(t), N_2(t)) = 0 \Rightarrow H(N_1(t), N_2(t)) = c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{N_1 \rightarrow 0} H(N_1, N_2) = \lim_{N_2 \rightarrow 0} H(N_1, N_2) = \lim_{N_1 \rightarrow \infty} H(N_1, N_2) = \lim_{N_2 \rightarrow \infty} H(N_1, N_2) = -\infty$$



$$H'(N_1, N_2) = \left(\frac{\alpha_2}{N_1} - \beta_2, \frac{\alpha_1}{N_2} - \beta_1 \right)$$

H е вогнута като лн. комбинация на вогнати функции и следователно множеството $S := \{(N_1, N_2) \mid H(N_1, N_2) \geq H(N_1^0, N_2^0)\}$ е изпъкнало.

03.12.2019 Дър. Системи от вида

$$\dot{P}_1(t) = \frac{\partial}{\partial P_2(t)} H(P_1(t), P_2(t))$$

$$\dot{P}_2(t) = -\frac{\partial}{\partial P_1(t)} H(P_1(t), P_2(t))$$

се наричат хамитониони.

Модел 29 (Лотка-Волterra, прогностичен)

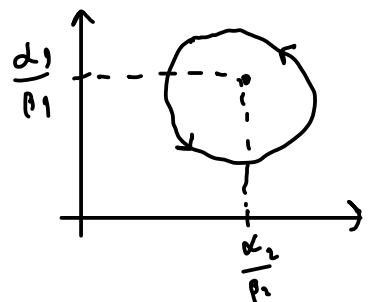
Положиме $P_i(t) := \ln N_i(t)$, $i=1,2 \Rightarrow N_i(t) = e^{P_i(t)}$ и

$$\bar{H}(P_1, P_2) := \alpha_2 P_1 + \alpha_1 P_2 - \beta_2 e^{P_1} - \beta_1 e^{P_2}$$

$$\dot{P}_1(t) = \frac{\dot{N}_1(t)}{N_1(t)} = \alpha_1 - \beta_1 e^{P_2(t)} = \frac{\partial}{\partial P_2(t)} \bar{H}(P_1(t), P_2(t))$$

$$\dot{P}_2(t) = -(\alpha_2 - \beta_2 e^{P_1(t)}) = -\frac{\partial}{\partial P_1(t)} \bar{H}(P_1(t), P_2(t))$$

$\Rightarrow$ системата е хамитониона



$$\frac{d}{dt} \ln N_1(t) = \alpha_1 - \beta_1 N_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} \ln N_2(t) = \alpha_2 - \beta_2 N_1(t)$$

$$\ln N_1(T) - \ln N_1(0) = 0 = \int_0^T \frac{d}{dt} \ln N_1(t) dt = \int_0^T (\alpha_1 - \beta_1 N_2(t)) dt = \alpha_1 T - \beta_1 \int_0^T N_2(t) dt$$

Модел 30

$$\dot{N}_1(t) = (\alpha_1 - \beta_1 N_2(t)) N_1(t) - \gamma_1 N_1(t) = ((\alpha_1 - \gamma_1) - \beta_1 N_2(t)) N_1(t)$$

$$\dot{N}_2(t) = -(\alpha_2 - \beta_2 N_1(t)) N_2(t) - \gamma_2 N_2(t) = ((\alpha_2 - \gamma_2) - \beta_2 N_1(t)) N_2(t)$$

$\Rightarrow$ моделът се свежда до модел 29 (Лотка-Волterra)

Модел 31 (Лотка-Волterra с две популации кервни)

$$\dot{N}_1(t) = (\alpha_1 - \beta_1 N_3(t)) N_1(t), N_1(0) = N_1^0 > 0$$

$$\dot{N}_2(t) = (\alpha_2 - \beta_2 N_3(t)) N_2(t), N_2(0) = N_2^0 > 0$$

$$\dot{N}_3(t) = -(\alpha_3 - \gamma_1 N_1(t) - \gamma_2 N_2(t)) N_3(t), N_3(0) = N_3^0 > 0$$

$$H(N_1, N_2) := \ln \frac{N_1^{\beta_2}}{N_2^{\beta_1}} = \beta_2 \frac{d}{dt} \ln N_1(t) - \beta_1 \frac{d}{dt} \ln N_2(t)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln N_1(t) &= \alpha_1 - \beta_1 N_3(t) \\ \frac{d}{dt} \ln N_2(t) &= \alpha_2 - \beta_2 N_3(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} H(N_1(t), N_2(t)) = \frac{d}{dt} \ln \frac{N_1(t)^{\beta_2}}{N_2(t)^{\beta_1}} =$$

$$= \beta_2 \frac{d}{dt} \ln N_1(t) - \beta_1 \frac{d}{dt} \ln N_2(t) =$$

$$= \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \beta_2 N_3(t) - \alpha_2 \beta_1 + \beta_1 \beta_2 N_3(t) =$$

$$= \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 =: \gamma$$

$\Rightarrow$ когато $\gamma \neq 0$, модела е клоник или моделът на Лотка-Волтера

Ако $\gamma = 0 \Rightarrow H(N_1(t), N_2(t)) = c \in \mathbb{R}$

Модел 32 (Лотка-Волтера с два хищника)

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = (\alpha_1 - \gamma_1 N_2(t) - \gamma_2 N_3(t)) N_1(t) \\ \dot{N}_2(t) = -(\alpha_2 - \beta_2 N_1(t)) N_2(t), N_2(0) = N_2^0 > 0 \\ \dot{N}_3(t) = -(\alpha_3 - \beta_3 N_1(t)) N_3(t), N_3(0) = N_3^0 > 0 \end{cases}$$

Модел 33 (Лотка-Волтера с ограничени ресурси)

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = (\alpha_1 - \beta_1 N_2(t) - \gamma_1 N_1(t)) N_1(t) \\ \dot{N}_2(t) = -(\alpha_2 - \beta_2 N_1(t) + \gamma_2 N_2(t)) N_2(t) \end{cases}$$

$$H(N_1, N_2) = \alpha_2 \ln N_1 + \alpha_1 \ln N_2 - \beta_2 N_1 - \beta_1 N_2$$

ак. на $0 \in \mathbb{R}^n$

Т-ма 34 (Ляпунов) Нека $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ е липшицова. Разм.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Ако $\exists$ функция на Ляпунов $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ за системата (1), стационарната точка 0 е асимптотично устойчива. Ако $\dot{V}_f$ е само отрицателно полуdefinitна, точката 0 е устойчива, но не непременно асимптотично устойчива.

D-во Нека $\varepsilon > 0$ и $r \in (0, \varepsilon): B(0, r) \subseteq D$. Нека $\alpha := \min_{x \in S(0, r)} V(x) > 0$ и $\beta \in (0, \alpha)$.

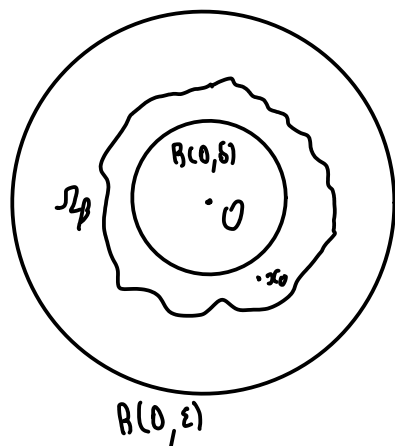
Положим $\Omega_\beta := \{x \in B(0, r) : V(x) \leq \beta\}$. Непременно $0 \in \Omega_\beta$.

Доп, че $\exists x_0 \in \Omega_\beta \cap S(0, \varepsilon) \Rightarrow V(x_0) \leq \beta < \alpha \leq V(x_0)$ - противоречие. Значи $\Omega_\beta \cap S(0, \varepsilon) = \emptyset$

Той като V е непрекъсната, $\Omega_\beta \subseteq B(0, r)$ и съществуват $\delta > 0 : B(0, \delta) \subseteq \Omega_\beta$.

Нека $x_0 \in B(0, \delta)$ и $t \geq 0$. Тогава

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= V(x(0)) + \int_0^t \frac{d}{ds} V(x(s)) ds = \\ &= V(x_0) + \int_0^t V'(x(s)) x'(s) ds = \\ &= V(x_0) + \underbrace{\int_0^t V'(x(s)) f(x(s)) ds}_{\leq 0} \leq V(x_0) \leq \beta < \alpha \end{aligned}$$



$\Rightarrow \forall t \geq 0, x(t) \in B(0, \varepsilon)$.

Следователно 0 е устойчива по Лапунов.

Друго означаване е само, че $\dot{V}_f(x)$ е отрицателно полуdefinitно.

Ако $\dot{V}_f(x)$ е отрицателно definitно, функцията $V(x(t))$ е намаляваща и ограничена отдолу и $m := \inf \{V(x(t)), t \geq 0\}$ е добре дефинирана.

Нека $\Omega_m := \{x \in B(0, r) \mid V(x) < m\}$ и $\gamma > 0 : B(0, \gamma) \subseteq \Omega_m$. фикс. $t \geq 0$.

Увиаме, че $V(x(t)) \geq m \Rightarrow x(t) \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid \gamma \leq \|x\| \leq r\}$, което е компактно множество $\Rightarrow \dot{V}_f$ достига максимум върху него.

Нека $\eta := -\max \{\dot{V}_f(x) \mid \gamma \leq \|x\| \leq r\} > 0$. Тогава

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}_f(x(s)) ds \leq V(x_0) + \int_0^t (-\eta) ds = V(x_0) - \eta t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty,$$

което противоречи на $V(x(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} m > 0$. Следователно $m = 0$.

□

Заг. 35 Да се намери функцията на Ляпунов за

(a) $\dot{x} = -x$

$V(x) = x^2$

$\dot{V}_f(x) = 2x(-x) = -2x^2 \leq 0$

(б) $\dot{x} = -x + a$

$V(x) := (x-a)^2$

$\dot{V}_f(x) = 2(x-a)(-x+a) = -2(x-a)^2 \leq 0$

(в) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$

$V(x, y) := x^2 + y^2$

$\dot{V}_f(x, y) = (2x \ 2y) \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ системата е устойчива, но не непрекъснато асимптотично устойчива

(г) $\begin{cases} \dot{x} = y-a \\ \dot{y} = b-x \end{cases} \leftarrow \text{разширение на (в)}$

$V(x, y) := (x-b)^2 + (y-a)^2$

$\dot{V}_f(x, y) := 2(x-b \ y-a) \begin{pmatrix} y-a \\ b-x \end{pmatrix} = 2(x-b)(y-a) + 2(y-a) \overset{-(x-b)}{b-x} = 0$

$\tilde{V}(x, y) := \int_b^x (z-b) dz + \int_a^y (\eta-a) d\eta$

$\dot{\tilde{V}}_f(x, y) = (x-b \ y-a) \begin{pmatrix} y-a \\ b-x \end{pmatrix} = 0$

(г) Лотка-Вольтера

$\begin{cases} \dot{x} = (a-by)x \\ \dot{y} = -(c-dx)y \end{cases}, a, b, c, d > 0$

$V(x, y) := \int_{c/d}^x \frac{(c-dz)}{z} dz + \int_{a/b}^y \frac{(a-b\eta)}{\eta} d\eta$

$\dot{V}_f(x, y) = \left(\frac{c-dx}{x} \ \frac{a-by}{y} \right) \begin{pmatrix} (a-by)x \\ -(c-dx)y \end{pmatrix} = 0$

Model 36 (SIS / susceptible $\rightarrow$ infections $\rightarrow$ susceptible)

$$\dot{S}(t) = -\lambda S(t) I(t) + \beta I(t), \quad S(0) = s_0 > 0, \lambda > 0, \beta > 0$$

$$\dot{I}(t) = \lambda S(t) I(t) - \beta I(t), \quad I(0) = I_0 > 0$$

$$\dot{S}(t) + \dot{I}(t) = 0$$

$$\text{s.o.o. } S(t) + I(t) = 1 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{I}(t) = \lambda(1 - I(t)) I(t) - \beta I(t) = \overbrace{(\lambda - \beta)}^{\gamma} I(t) - \lambda I^2(t) = \\ I(0) = I_0 \end{array} \right|$$

$$= \gamma I(t) - \lambda I^2(t)$$

$$- \frac{\dot{I}(t)}{I^2(t)} = -\gamma \cdot \frac{1}{I(t)} + \lambda; \quad y(t) := \frac{1}{I(t)}$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y}(t) = -\gamma y(t) + \lambda \\ y(0) = \frac{1}{I_0} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(y(t) - \frac{\lambda}{\gamma} \right) = -\gamma \left(y(t) - \frac{\lambda}{\gamma} \right) \Rightarrow y(t) = e^{-\gamma t} \left(y_0 - \frac{\lambda}{\gamma} \right) + \frac{\lambda}{\gamma}$$

Модел 37 (Размножение на SIS)

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\lambda S(t)I(t) + \beta I(t) + \mu - \mu S(t), & S(0) > 0 \\ \dot{I}(t) = \lambda S(t)I(t) - \beta I(t) - \mu I(t), & I(0) > 0 \\ S(0) + I(0) = 1 \Rightarrow I(t) + S(t) = 1 \end{cases}$$

$$\dot{S}(t) + \dot{I}(t) = \mu(1 - S(t) - I(t)) = \mu - \mu(S(t) + I(t))$$

Нека $x(t) := S(t) + I(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = \mu - \mu x(t)$

интегралата се добива до

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mu - \mu x(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu \sigma} d\sigma = e^{-\mu t} + 1 - e^{-\mu t} = 1$$

Модел 38

$$\begin{cases} \dot{I}(t) = \lambda(1 - I(t))I(t) - \beta I(t) - \mu I(t) \\ I(0) = I_0 \end{cases}$$

$$\dot{I}(t) = \underbrace{\lambda - \beta - \mu}_\alpha I(t) - \lambda I^2(t)$$

Нека $x(t) := \frac{1}{I(t)}$

$$\Rightarrow -\frac{I'(t)}{I^2(t)} = -\frac{\alpha}{I(t)} + \lambda \Rightarrow \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{I_0} e^{-\alpha t} + \lambda \int_0^t e^{-\alpha(t-\sigma)} d\sigma = e^{-\alpha t} \left(\frac{1}{I_0} + \frac{\lambda}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) \right)$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\frac{1}{I_0} + \frac{\lambda}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1)} \xrightarrow{t \uparrow \infty} \frac{\alpha}{\lambda}$$

Заг. 39 Да се намери ф-ция на Ляпунов за

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y^3 \\ \dot{y} = -y^3 + 3xy^2 \end{cases}$$

Решение $V(x, y) = ax^2 + by^2$ за някои a и b

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_f(x, y) &= 2ax(-x - 2y^3) + 2by(-y^3 + 3xy^2) = -2ax^2 - 4axy^3 - 2by^4 + 6bxy^3 = \\ &= \underbrace{-2(ax^2 + by^4)}_{\leq 0} + xy^3 \underbrace{(-4a + 6b)}_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}b, \text{ например } \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

17.12.2019 Заг. 40

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + y^4(t) \\ \dot{y}(t) = -2y(t) - x(t)y(t) \end{cases}$$

$$V(x, y) = ax^{2k} + by^{2n} \text{ за някои } a, b \in \mathbb{R}^{>0} \text{ и } k, n \in \mathbb{Z}^{>0}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_f(x, y) &= 2kax^{2k-1}(-x + y^4) + 2nb y^{2n-1}(-2y - xy) = \\ &= -2kax^{2k} + 2kax^{2k-1}y^4 - 4nb y^{2n} - 2nbxy^{2n} = \\ &= -\underbrace{2kax^{2k}}_{\geq 0} - \underbrace{4nb y^{2n}}_{\geq 0} + 2xy(kax^{2k-2}y^3 - nb y^{2n-1}) \end{aligned}$$

$$\text{Числене } kax^{2k-2}y^3 = nb y^{2n-1}$$

$$x^{2k-2} = x^0 \Rightarrow k=1$$

$$y^3 = y^{2n-1} \Rightarrow 3=2n-1 \Rightarrow n=2$$

$$\Rightarrow a=2b, \text{ например } a=2 \text{ и } b=1$$

$$\Rightarrow V(x, y) = 2x^2 + y^4$$

$$\dot{V}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x & 4y^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3x + y^4 \\ -2y - xy \end{pmatrix} = -12x^2 + 4y^7 - 8xy - 4xy^3$$

Заг. 41 Да се докаже, че системата

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -g(x(t)) \\ g(0) = 0 \\ x \cdot g(x) > 0 \end{cases}$$

е асимптотично устойчива

Модел 42 (математическо масало)

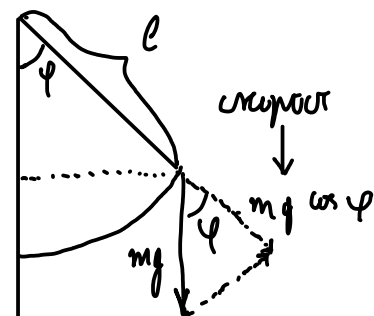
$$\varphi(t) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{A(t)}{l} = \ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \sin \varphi(t) - \frac{k}{m} \dot{\varphi}(t)$$

↑ ↑
трение трение

$$\frac{S(t)}{l} = \varphi(t) \quad \text{път}$$

$$\frac{V(t)}{l} = \dot{\varphi}(t) \quad \text{скорост}$$



Без трение

$$F(t) = m A(t) = -m g \sin \varphi(t)$$

$$\Rightarrow A(t) = \dot{V}(t) = -g \sin \varphi(t)$$

Разглеждане системата

$$x(t) = \varphi(t)$$

$$y(t) = \dot{x}(t)$$

$$\dot{x}(t) = y(t)$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{g}{l} \sin x(t) - \frac{k}{m} y(t)$$

$$E(x, y) := \frac{m}{2} \dot{V}^2 + m g h = \frac{m l^2}{2} y^2 + m g l (1 - \cos x)$$

↑
енергия

$$\frac{d}{dt} E(x, y) = \dot{E}(x, y) = (m g l \sin x, m l^2 y) \begin{pmatrix} y \\ -\frac{g}{l} \sin x - \frac{k}{m} y \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{m g l y \sin x - m g l y \sin x - k l^2 y^2}_{\leq 0} \leq 0$$

0 ← енергията без тренията се запазва

⇒ Енергията намалява заради тренията

За да се намери функцията на Ляпунов (отр. дефиниция)

Отр. Нека D е ок. на $0 \in \mathbb{R}^n$ и $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ е липшицова. Разг.

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

$$x(0) = x_0$$

Нека $\varphi(t, x_0)$ е решение на системата в момента t .

Положение $\Omega(x_0) := \{y = \lim_{t \uparrow \infty} \varphi(t, x_0)\}$ да бъде множеството от

вектори точки от $\mathbb{R}^n$, които са граници на $\varphi(t, x_0)$ за някои

производима положителна редица t_n .

Лема 43 (Свойства на $\Omega(x_0)$)

Ще предположим, че функцията $\varphi(t, x_0)$ е ограничена по t .

1) $\Omega(x_0) \neq \emptyset$

Д-во Нека $t_n \rightarrow \infty$.

$x_n = \varphi(t_n, x_0) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ редицата x_n е ограничена $\Rightarrow \exists$ сходя. подредица

$$\Omega(x_0) \ni x = \lim_{t_n \rightarrow \infty} \varphi(t_{n_k}, x_0)$$

□

2) $\Omega(x_0)$ е ограничено

Д-во Нека $x = \lim_{t_n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x_0) \in \Omega(x_0)$

φ е ограничена $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall t \geq 0, \|\varphi(t, x_0)\| \leq M \Rightarrow \Omega(x_0) \subseteq B(0, M)$.

□

3) $\Omega(x_0)$ е затворено

Д-во (за глм.)

4) $\Omega(x_0)$ е положително инвариантно, т.е. ако $x \in \Omega(x_0)$, то $\forall t \geq 0$, $\varphi(t, x) \in \Omega(x_0)$

Д-во Нека t е фикс. и $x = \lim_{t_n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x_0) \in \Omega(x_0)$.

Положиме $x_n := \varphi(t_n, x_0), n \in \mathbb{N}$.

Тъй като редицата $\{t + t_n\}$ също клони към ∞ , имаме, че

$$\varphi(t + t_n, x_0) \in \Omega(x_0), n \in \mathbb{N}$$

Тогава $\varphi(t + t_n, x_0) = \varphi(t, \underbrace{\varphi(t_n, x_0)}_{x_n}) = \varphi(t, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(t, x) \in \Omega(x_0)$

непр. зависи от начални условия

Ω_0 е затворено

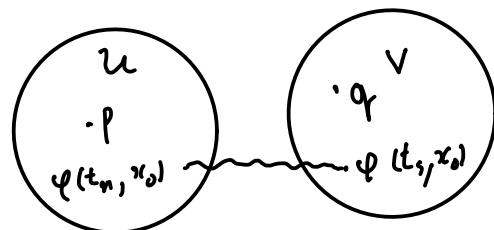
5) Ω_0 е свързано

Д-во Нека U, V - дисюнктни и отворени и $\Omega(x_0) = U \cup V$.

Нека $p = \lim_{t_n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x_0) \in U$ и $q = \lim_{s_n \rightarrow \infty} \varphi(s_n, x_0) \in V$.

Б.о.о. нека $t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \dots < t_n < s_n < \dots$

Тъй като $\varphi(t, x_0)$ е непрекъсната по t , за



произвольно $k \in \mathbb{N}$ съществува непрекъсната крива, свързваща $\varphi(t_k, x_0)$ и $\varphi(s_k, x_0)$. Тъй като по дефиниция $\Omega(x_0)$ не е свързано, то не е нит. свързано и $\Rightarrow \exists \tau_k \in (t_k, s_k) : \varphi(\tau_k, x_0) \notin \Omega(x_0) = U \cup V$.

Редицата $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ и, понеже φ е ограничена функция, за някаква подредица t_{n_k} , редицата $\varphi(t_{n_k}, x_0)$ е сходяща.

Тогава $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_{n_k}, x_0) \notin \Omega(x_0)$ - противоречие.

Значи $\Omega(x_0)$ е свързано. □

б) $\varphi(t, x_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Omega(x_0)$, т.е. $d(\varphi(t, x_0), \Omega(x_0)) = \min_{x \in \Omega(x_0)} d(\varphi(t, x_0), x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

д-во Доп., че $d(\varphi(t, x_0), \Omega(x_0)) \not\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

Нека $\varepsilon_0 > 0$ и редицата t_n е такава, че $\exists m : n > m \Rightarrow |\varphi(t_n)| \geq \varepsilon_0$.

Но φ е орг. и $\exists$ подредица; $\varphi(t_{n_k}, x_0) \xrightarrow{t_{n_k} \rightarrow \infty} p \in \Omega(x_0)$

$\varepsilon_0 \leq \text{dist}(\varphi(t_{n_k}, x_0), \Omega(x_0)) \leq \|p - \varphi(t_{n_k}, x_0)\| \xrightarrow{t_{n_k} \rightarrow \infty} 0$ - противоречие. □

Т-ма 43 (Тримунт на Ласал)

Нека $S \subseteq \mathbb{R}^n$ е ограничено, непразно, затворено, пол. инвариантно.

Нека $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ е липшицова. Разгл.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in S \end{cases}$$

Нека $V: S \rightarrow \mathbb{R}$ е непр. диференцируема и $\forall x \in S, \dot{V}_f(x) \leq 0$

Нека $Z := \{x \in S : \dot{V}_f(x) = 0\}$ и M е най-голямото максимално инвариантно подмножество на Z . Тогава $\Omega(x_0) \subseteq M$.

д-во

Разгл. $m := \inf \{V(\varphi(t, x_0)), t \geq 0\}$

Нека $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists t_\varepsilon : m \leq V(\varphi(t_\varepsilon, x_0)) < m + \varepsilon$

Нека $t \geq t_\varepsilon \Rightarrow m \leq V(\varphi(t, x_0)) \leq V(\varphi(t_\varepsilon, x_0)) < m + \varepsilon$

$$\text{Кека } y = \lim_{t_k \uparrow \infty} \varphi(t_k, x_0) \in \Omega(x_0)$$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: t_k > t_\varepsilon \text{ ако } k \geq n.$$

$$\Rightarrow V(\varphi(t_k, x_0)) \xrightarrow{t_k \uparrow \infty} V(y) = m.$$

$$\varphi(t, y) \in \Omega(x_0) \text{ и } \dot{V}_f(x(t)) \text{ е строго намаляваща по } t \Rightarrow$$

$$V(\varphi(t, y)) = m$$

$$0 = \frac{d}{dt} V(\varphi(t, y)) = V'(\varphi(t, y)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t, y) = V'(\varphi(t, y)) f(\varphi(t, y)) = \dot{V}_f(\varphi(t, y))$$

$$0 = V'(y) f(y)$$

$$\Rightarrow \Omega(x_0) \subseteq M \subseteq Z$$

Заг. 44 (сам) Да се реши уравнението

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Решение

$x(t) \equiv 0$ е решение

дон, че $\exists \tau \in \mathbb{R}: x(\tau) \neq 0$. Тогава в околност на τ можем да разделим на $\sqrt{x(t)}$:

$$\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{x(t)}} = 1 \Rightarrow \frac{d}{dt} 2\sqrt{x(t)} = 1 \Rightarrow \sqrt{x(t)} - 0 = \frac{t}{2} - 0 \Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Това е и исканото решение

Заг. 45 Да се намери функцията на Ляпунов за системата

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -k(y) - g(x) \\ x g(x) > 0, x \neq 0 \\ y k(y) > 0, y \neq 0 \end{cases}$$

$$V(x, y) := \frac{1}{2} y^2 + \int_0^x g(z) dz$$

$$\dot{V}(x, y) = (g(x), y) \begin{pmatrix} y \\ -k(y) - g(x) \end{pmatrix} = g(x) y - y k(y) - y g(x) = -y k(y) \leq 0$$

Т-ма 46 (Барбатини и Красовски) Нека $D \in \mathbb{R}^n$ е равновесна точка на системата

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

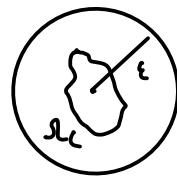
Нека $D \subseteq \mathbb{R}^n$ е околност на 0 и $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ е непр. гиф., пол. дефинитна функция, такава че $\dot{V}_f(x) \leq 0 \forall x \in D$.

Нека $Z := \{x \in D : \dot{V}_f(x) = 0\}$. Ако Z не съдържа изцяло траекториите на дадена точка освен $x(t) \equiv 0$, то системата е асимптотично устойчива.

Д-во: Нека $\varepsilon > 0$ и $r \in (0, \varepsilon) : B(0, r) \subseteq D$ и $c \in (0, \min\{V(x) \mid \|x\| = r\})$

Премахнахме прикрития на локал към множеството

$$\Omega_c := \{x \in B(0, \varepsilon) \mid V(x) \leq c\}$$



□

Модел 1 (Биореактор, прозвмещение от убожната лемгуа)

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = u(s_{in} - s(t)) - k\mu(s(t))x(t), & s(0) = s_0 > 0 \\ \dot{x}(t) = x(t)(\mu(s(t)) - d) & , x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

s_{in}, u и k са положителни константи
 $d \in (0, 1)$

Ще предполагаме, че $\mu: \mathbb{R}^{20} \rightarrow \mathbb{R}^{20}$ е непрекъснато глф., ограничена и положително дефинитна.

(a) Равновесни точки:

o $\bar{x} = \bar{s} = 0$

o Търсим равновесни $\bar{x} \neq 0$ и $\bar{s} \neq 0$

$$\begin{cases} u(s_{in} - \bar{s}) - k\mu(\bar{s})\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{u(s_{in} - \bar{s})}{k\mu(\bar{s})} \\ \bar{x}(\mu(\bar{s}) - d) = 0 \Rightarrow \mu(\bar{s}) = d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{s_{in} - \bar{s}}{dk}$$

Ще предполагаме още, че

o $\bar{s} < s_{in}$

o $\mu(s) < d$ за $s < \bar{s}$

o $\mu(s) > d$ за $s > \bar{s}$

(b) Ще докажем, че $\exists T > 0: \forall t > T, s(t) \in (0, s_{in})$

Д-во Дон. че това не е така, т.е. $s(t) \geq s_{in}, t \geq 0$

Тъй като $\mu(s_{in}) > d \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall s \in (s_{in} - \varepsilon, s_{in} + \varepsilon), \mu(s) > d$
Очевидно това

$$\dot{s}(t) = u(s_{in} - s(t)) - k\mu(s(t))x(t) \leq u(s_{in} - s(t))$$

$$\frac{d}{dt}(s(t) - s_{in}) \underbrace{- u(s_{in} - s(t))}_{u(s(t) - s_{in})} \leq 0 \quad | \cdot e^{tu}$$

$$\frac{d}{dt}((s(t) - s_{in})e^{tu}) \leq 0$$

$$(s(t) - s_{in})e^{tu} \leq (s_0 - s_{in})e^0$$

$$s(t) \leq s_{in} + \underbrace{e^{-tu}(s_0 - s_{in})}_{\geq 0}$$

Тогда $\exists T_\varepsilon > 0: \forall t > T_\varepsilon, s_{im} \leq s(t) \leq s_{im} + \varepsilon$
 $\uparrow$ $\nwarrow$
 неограниченно неограниченно

$$\Rightarrow \forall t > T_\varepsilon, \mu(s(t)) > d_n$$

$$\Rightarrow \forall t > T_\varepsilon, \dot{x}(t) = x(t) (\underbrace{\mu(s(t)) - d_n}_{> 0}) > 0 \Rightarrow x(t) \geq x(T_{\varepsilon_0}) > 0$$

$$\dot{s}(t) = u(s(t) - s_{im}) - \kappa \underbrace{\mu(s(t))}_{> 0} x(t) \leq -\kappa \mu(s(t)) x(t) < 0$$

Тогда $A \in (-\kappa \mu(s(t)) x(t), 0)$

$$\Rightarrow s(t) = s(T_\varepsilon) + \int_{T_\varepsilon}^t \dot{s}(\sigma) d\sigma \leq s(T_\varepsilon) + (t - T_\varepsilon) A \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty - \text{противоречие с } s(t) \geq s_{im}$$

$$\Rightarrow \exists T_0 > 0: s(t) < s_{im}. \text{ Тогда } t_0 > T_0.$$

• Тогда $s(t) > s_{im}$, то $\dot{s}(t_0) = u(s_{im} - \underbrace{s(t_0)}_{> s_{im}}) - \kappa \underbrace{\mu(s(t_0))}_{< 0} x(t_0) < 0$

$$\Rightarrow s \text{ убывает в окрестности } t_0$$

$$\Rightarrow \exists T > T_0: \forall t > T, s(t) < s_{im}$$

• Тогда $s(t) < s_{im} \forall t > T_0$, рассмотрим $T := T_0$.

(b) Тогда $s_{im} > s_0$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists T > 0: \forall t > 0$,

$$s_{im} - \varepsilon < s(t) + \kappa x(t) < \frac{s_{im}}{\alpha} + \varepsilon$$

до-во Рассмотрим $p(t) := s(t) + \kappa x(t) - \frac{s_{im}}{\alpha}$

Тогда $\dot{p}(t) = \dot{s}(t) + \kappa \dot{x}(t) = u(s_{im} - s(t)) - \kappa \mu(s(t)) x(t) + \kappa \mu(s(t)) x(t) - \kappa d_n x(t) =$
 $= u(s_{im} - s(t)) - \kappa d_n x(t) = -u(s(t) + d_n \kappa x(t) - s_{im}) \leq$
 $\leq -d_n p(t)$

$$\Rightarrow p(t) \leq e^{-d_n t} p(0)$$

$$\Rightarrow p \text{ е вып. функция от } p(0) = s_0 + \kappa x_0 + s_{im}$$

$$\Rightarrow s(t) + \kappa x(t) \leq \frac{s_{im}}{\alpha} + p(0)$$

Ако $\varepsilon \geq p(0)$, рассмотрим $T := 0$

Ако $\varepsilon < p(0)$, выберем $T > 0: p(T) = \varepsilon$

Analogies zu $\sigma(t) := s(t) + k x(t) - s_{im}$

(2) Lyapunov

$$V(s, x) := \int_{\bar{s}}^s Q(\zeta) d\zeta + \int_{\bar{x}}^x \frac{\eta - \bar{x}}{\eta} d\eta$$

$$\dot{V}_f(s, x) = \begin{pmatrix} Q(s) & \frac{x - \bar{x}}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s_{im} - s) - k\mu(s)x \\ (\mu(s) - d u)x \end{pmatrix} =$$

$$= Q(s) [u(s_{im} - s) - k\mu(s)x] + \frac{x - \bar{x}}{x} (\mu(s) - d u)x =$$

$$= \left(Q(s) u(s_{im} - s) - \bar{x} (\mu(s) - d u) \right) + (\mu(s) - d u)x \left(1 - \frac{Q(s)\mu(s)k}{\mu(s) - d u} \right)$$

1. Fall. $Q(s) = \frac{\bar{x}(\mu(s) - d u)}{u(s_{im} - s)}$

$$\Rightarrow \dot{V}_f(s, x) = 0 + (\mu(s) - d u)x \left(1 - \frac{\frac{\bar{x}(\mu(s) - d u)}{u(s_{im} - s)} \mu(s) k}{\mu(s) - d u} \right) = (\mu(s) - d u)x \left(1 - \frac{s_{im} - \bar{s}}{s_{im} - s} \frac{\mu(s)}{d u} \right)$$

1. Fall. Also $s < \bar{s} \Rightarrow 0 < \frac{s_{im} - \bar{s}}{s_{im} - s} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{\mu(s)}{d u} < 1 \Rightarrow \dot{V}_f(s, x) \leq 0$

2. Fall. Also $s > \bar{s} \Rightarrow \frac{s_{im} - \bar{s}}{s_{im} - s} > 1 \Rightarrow \frac{\mu(s)}{d u} > 1 \Rightarrow \dot{V}_f(s, x) \leq 0$

3. Fall. Also $s = \bar{s} \Rightarrow \frac{s_{im} - \bar{s}}{s_{im} - s} = 1 \Rightarrow \dot{V}_f(s, x) = \frac{(\mu(s) - d u)^2}{d u} x = 0$

$$\Rightarrow Z = \{(s, x) : \dot{V}_f(s, x) = 0\} = \{(s, x) : x = 0 \text{ oder } s = \bar{s}\}$$

Wende $\varepsilon := \frac{s_{im} - \bar{s}}{3}$. 1.6 (b) $\exists T > 0 : \forall t > T, s_{im} - \varepsilon < s(t) + k x(t)$

$$\Rightarrow s(t) > s_{im} - \varepsilon - k x(t) = (3\varepsilon + \bar{s}) - \varepsilon - k x(t) = 2\varepsilon + \bar{s} - k x(t)$$

Also $\exists \bar{t} > T : x(\bar{t}) < \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow -k x(\bar{t}) > -\varepsilon$

$$\Rightarrow s(\bar{t}) > \bar{s} + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu(s(\bar{t})) > \mu(\bar{s} + \epsilon) > \mu(\bar{s})$$

$$\Rightarrow \dot{x}(\bar{t}) = x(\bar{t}) (\mu(s(\bar{t})) - d) > x(\bar{t}) (\mu(\bar{s}) - d) = 0$$

$$\exists \epsilon > 0, \text{ ако } x(t) \leq \frac{\epsilon}{K}, \text{ то } x(t) \geq x(\bar{t}) > 0$$

$\Rightarrow (\bar{s}, \bar{x})$ е максималното положително инвариантно подмножество на Z .

$\Rightarrow (\bar{s}, \bar{x})$ е асимптотичен пункт

(g) Стабилизиране

Нека ева $u = u(s, x) := \frac{K \mu(s) x}{s_{in} - \bar{s}}$ е функция

Нека $\bar{s} \in (0, s_{in})$

$$\bar{x} = \frac{s_{in} - \bar{s}}{dK}$$

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \frac{K \mu(s(t)) x(t)}{s_{in} - \bar{s}} (s_{in} - s(t)) - K \mu(s(t)) x(t) = \frac{K \mu(s(t)) x(t)}{s_{in} - \bar{s}} (s_{in} - s(t) - s_{in} + \bar{s}) = \\ &= - \underbrace{\frac{K \mu(s(t)) x(t)}{s_{in} - \bar{s}}}_{=: f(t) = -u(s(t), x(t))} (s(t) - \bar{s}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) \left[\mu(s(t)) - \frac{d K \mu(s(t)) x(t)}{s_{in} - \bar{s}} \right] = \frac{x(t) \mu(s(t))}{s_{in} - \bar{s}} (s_{in} - \bar{s} - d K x(t)) = \\ &= - \frac{x(t) \mu(s(t))}{s_{in} - \bar{s}} d K (x(t) - \bar{x}) = d f(t) (x(t) - \bar{x}) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} (s(t) - \bar{s}) + f(t) (s(t) - \bar{s}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\int_0^t f(\sigma) d\sigma} (s(t) - \bar{s}) \right) = 0 \Rightarrow s(t) = \bar{s} + e^{-\int_0^t f(\sigma) d\sigma} (s(0) - \bar{s})$$

$$\delta(t) := e^{-\int_0^t f(\sigma) d\sigma} \in (0, 1)$$

$$s(t) = \bar{s} (1 - \delta(t)) + \delta(t) s(0), t \geq 0 \Rightarrow x(t) \text{ и } s(t) \text{ са ограничени отгоре.}$$

$$\delta(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow s(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{s} \text{ и } x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{x}$$